Differenciálszámítás alkalmazásai I Függvényvizsgálat

Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

Folytonosság differenciálható függvényekre

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának.

Folytonosság differenciálható függvényekre

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának.

Tétel

Ha egy függvény differenciálható x_0-ban, akkor ott folytonos is.
($\lim_{h \to 0} f(x_0+h) \to f(x_0)$).

Folytonosság differenciálható függvényekre

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának.

Tétel

Ha egy függvény differenciálható x_0-ban, akkor ott folytonos is. ($\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) \to f(x_0)$).

Ennek a tételnek a másik irányát is sokszor használjuk: Ha f nem folytonos x_0-ban, akkor ott nem deriválható.

Lokális szélsőérték és deriváltja

Definíció

Legyen $K_\delta(x_0) \subset D_f$, *azaz legyen* f *értelmezve* x_0 *egy környezetében. Az* f *függvénynek lokális szélsőértéke van az* x_0 *pontban, ha létezik olyan környezete, melyben* $f(x_0)$ *a maximális vagy a minimális függvényérték.*

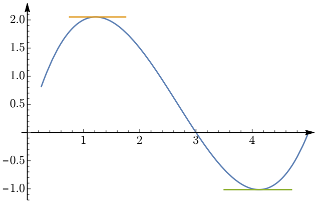
Lokális szélsőérték és deriváltja

Definíció

Legyen $K_\delta(x_0) \subset D_f$, azaz legyen f értelmezve x_0 egy környezetében. Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az x_0 pontban, ha létezik olyan környezete, melyben $f(x_0)$ a maximális vagy a minimális függvényérték.

Tétel

Legyen $K_\delta(x_0) \subset D_f$. Ha f differenciálható x_0-ban és ott lokális szélsőértéke van, akkor ott a deriváltja 0.

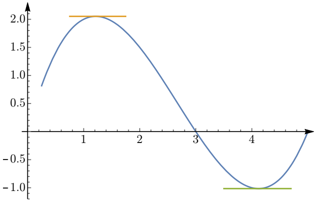


Előző tétel bizonyítása

Bizonyítás:

Tegyük, fel hogy lokális maximumról van szó, ekkor:

$$\lim_{x\to x_0-}\overbrace{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}^{\geq 0}=\lim_{x\to x_0+}\overbrace{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}^{\leq 0}$$

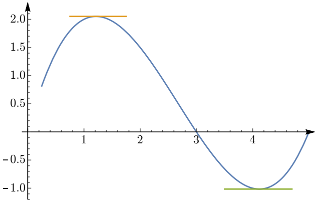


Előző tétel bizonyítása

Bizonyítás:

Tegyük, fel hogy lokális maximumról van szó, ekkor:

$$\lim_{x \to x_0 -} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}^{\geq 0} = \lim_{x \to x_0 +} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}^{\leq 0} = 0,$$



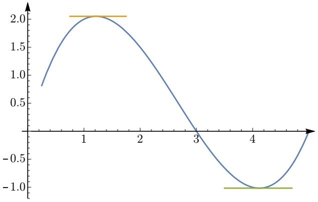
Előző tétel bizonyítása

Bizonyítás:

Tegyük, fel hogy lokális maximumról van szó, ekkor:

$$\lim_{x\to x_0-}\overbrace{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}^{\geq 0}=\lim_{x\to x_0+}\overbrace{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}^{\leq 0}=0,$$

lokális minimumra a bizonyítás hasonló.■



Rolle tétele

Tétel (Rolle)

Ha f folytonos $[a, b]$*-n és differenciálható* (a, b)*-n és* $f(a) = f(b)$*, akkor*

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$$

Rolle tétele

Tétel (Rolle)

Ha f folytonos $[a,b]$*-n és differenciálható* (a,b)*-n és* $f(a)=f(b)$*, akkor*

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$$

Bizonyítás.

Weierstrass tétele értelmében f-nek van abszolút minimuma és maximuma. Ha mindkettőt a végpontokban veszi fel, akkor $f(a)=f(b)$ miatt $f(x)\equiv$ konst. és így $\exists c \in (a,b)$-re $f'(c)=0$. Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel értelmében $f'(c)=0$ (c a szélsőértékhely). ∎

Lagrange-féle középérték tétel

Tétel (Lagrange)

Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, akkor $\exists c \in (a, b)$:

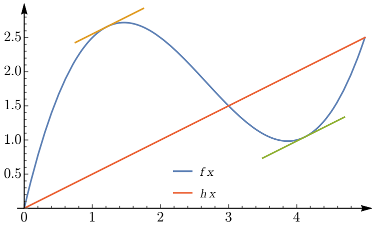
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lagrange-féle középérték tétel

Tétel (Lagrange)

Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, akkor $\exists c \in (a, b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Lagrange-féle középérték tétel

Tétel (Lagrange)

Ha f folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n, akkor $\exists c \in (a,b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bizonyítás.

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$g(x) = f(x) - h(x), \quad g(a) = g(b)$$

$$\Rightarrow RolleT. \Rightarrow \exists c : g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

■

Lagrange-féle középérték tétel következményei

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, és ott $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, akkor:

$$f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a,b]$$

Lagrange-féle középérték tétel következményei

Következmény

Ha f folytonos $[a,b]$*-n és differenciálható* (a,b)*-n, és ott* $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$*, akkor:*

$$f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a,b]$$

Bizonyítás.

$$\forall [x_1, x_2] \subset [a,b] - re \Rightarrow \text{Lagrange KéT.} \Rightarrow \exists c:$$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\text{De mivel } f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

■

Lagrange-féle középérték tétel következményei

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, és ott $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, akkor:

$$f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a,b]$$

Következmény (Integrálszámítás I. főtétele)

Ha f, g folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, és ott

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\text{akkor } \exists C \quad f(x) \equiv g(x) + C \quad \forall x \in [a,b]$$

Lagrange-féle középérték tétel következményei

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, és ott $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, akkor:

$$f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a,b]$$

Következmény (Integrálszámítás I. főtétele)

Ha f, g folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, és ott

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\text{akkor } \exists C \quad f(x) \equiv g(x) + C \quad \forall x \in [a,b]$$

Bizonyítás.

Az előző tételt kell használni $f(x) - g(x)$-re ■

Cauchy féle középérték tétel

Tétel (Cauchy)

Ha f és g folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, és $g'(x) \neq 0$ ha $x \in (a,b)$, akkor $\exists c \in (a, b)$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Cauchy féle középérték tétel

Tétel (Cauchy)

Ha f és g folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, és $g'(x) \neq 0$ ha $x \in (a,b)$, akkor $\exists c \in (a, b)$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Bizonyítás.

Hasonlóan az előzőekhez segédfüggvény bevezetésével Rolle tételét felhasználva. Megjegyzés: ha $g(a) = g(b)$ lenne, akkor Rolle tétele miatt $g'(x) = 0$ lenne valamely $x \in (a,b)$-re. ∎

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital)

Legyen f és g differenciálható x_0 egy környezetében és $g' \neq 0$ az x_0 egy kipontozott környezetében. Legyen $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú és tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Ekkor $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital)

Legyen f és g differenciálható x_0 egy környezetében és $g' \neq 0$ az x_0 egy kipontozott környezetében. Legyen $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú és tegyük fel, hogy létezik $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ekkor $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Megjegyzés: itt x_0 lehet valós szám, az x_0+, x_0-, $+\infty$ vagy $-\infty$ szimbólumok valamelyike.

Bizonyítás: A Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva.

Példa 1

Példa 1: $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{e^x - 1} = ?$
Mivel ha $x = 0$-t helyettesítünk mind a számláló mind a nevező 0-hoz tart, így teljesül a L'Hospital-szabály feltétele, azaz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^4}}{e^x} = 0$$

Példa 2

Példa 2: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = ?$

Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is $+\infty$-hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

Példa 2

Példa 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} =?$
Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is $+\infty$-hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$$

Példa 2

Példa 2: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = ?$

Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is $+\infty$-hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Ez még mindig $\frac{+\infty}{+\infty}$ alakú, így még egyszer alkalmazhatjuk a szabályt:

Példa 2

Példa 2: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = ?$
Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is $+\infty$-hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$$

Ez még mindig $\frac{+\infty}{+\infty}$ alakú, így még egyszer alkalmazhatjuk a szabályt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$-re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a $\leq$ helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$-re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a $\leq$ helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Tétel

Ha az f differenciálható és $f'(x) \geq 0$ I-n $\Leftrightarrow$ f monoton nő I-n.

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$-re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a $\leq$ helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Tétel

Ha az f differenciálható és $f'(x) \geq 0$ I-n $\Leftrightarrow$ f monoton nő I-n.

Bizonyítás.

$$\text{Lagrange KéT.-ből } \forall x_1, x_2 : \exists c \in (x_1, x_2) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$$

$$f \text{ monoton nő } \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\frac{+}{+}, \frac{-}{-}} \geq 0 \quad \blacksquare$$

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$-re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a $\leq$ helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Tétel

Ha az f differenciálható és $f'(x) > 0$ I-n $\Rightarrow$ f szig. mon. nő I-n.

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$-re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a $\leq$ helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Tétel

Ha az f differenciálható és $f'(x) > 0$ I-n $\Rightarrow$ f szig. mon. nő I-n.

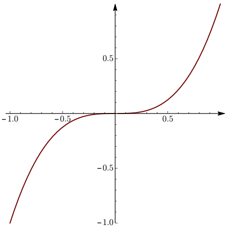
Bizonyítás.

$$\text{Lagrange KéT.-ből } \forall x_1, x_2 : \exists c \in (x_1, x_2) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0 \qquad \blacksquare$$

DE: f szig. mon. nő $\not\Rightarrow f' > 0$

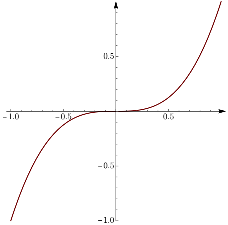
Monotonitás II

Példa: Az x^3 függvény szigorú monoton nő. Ugyanakkor $\left(x^3\right)' = 3x^2$ az $x = 0$ pontban nem pozitív.



Monotonitás II

Példa: Az x^3 függvény szigorú monoton nő. Ugyanakkor $(x^3)' = 3x^2$ az $x = 0$ pontban nem pozitív.



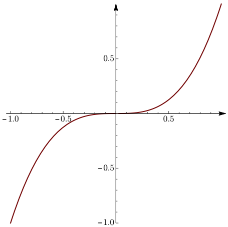
Nyilván monoton csökkenésre hasonló igaz:

Tétel

Ha az f deriválható és $f'(x) \leq 0$ I-n, $\Leftrightarrow$ f monoton csökken I-n.
Ha az f deriválható és $f'(x) < 0$ I-n $\Rightarrow$ f szig. mon. csökk. I-n.

Monotonitás II

Példa: Az x^3 függvény szigorú monoton nő. Ugyanakkor $\left(x^3\right)' = 3x^2$ az $x = 0$ pontban nem pozitív.



Nyilván monoton csökkenésre hasonló igaz:

Tétel

Ha az f deriválható és $f'(x) \leq 0$ I-n, $\Leftrightarrow$ f monoton csökken I-n.
Ha az f deriválható és $f'(x) < 0$ I-n $\Rightarrow$ f szig. mon. csökk. I-n.

Bizonyítás az utóbbival analóg módon.

Lokális szélsőérték

Korábbi tétel szerint, lokális szélsőértéknél a derivált nulla. Láttuk viszont, hogy visszafelé ez nem feltétlenül igaz. A szélsőérték létezéséről szól a következő tétel:

Lokális szélsőérték

Korábbi tétel szerint, lokális szélsőértéknél a derivált nulla. Láttuk viszont, hogy visszafelé ez nem feltétlenül igaz. A szélsőérték létezéséről szól a következő tétel:

Tétel

Ha f differenciálható az I intervallumon, $f'(x_0) = 0$ és deriváltja előjelet vált x_0-ban, akkor ott lokális szélsőértékhelye van. Mégpedig:
Ha pozitívból negatívba $\Rightarrow$ lokális maximuma van.
Ha negatívból pozitívba $\Rightarrow$ lokális minimuma van.

Megjegyzés: Tehát $f'(x_0) = 0$ szükséges feltétele annak, hogy x_0 szélsőérték, de nem elégséges. Példa: $f(x) = x^3$.

Lokális szélsőérték

Korábbi tétel szerint, lokális szélsőértéknél a derivált nulla. Láttuk viszont, hogy visszafelé ez nem feltétlenül igaz. A szélsőérték létezéséről szól a következő tétel:

Tétel

Ha f differenciálható az I intervallumon, $f'(x_0) = 0$ és deriváltja előjelet vált x_0-ban, akkor ott lokális szélsőértékhelye van. Méghozzá:
Ha pozitívból negatívba $\Rightarrow$ lokális maximuma van.
Ha negatívból pozitívba $\Rightarrow$ lokális minimuma van.

Megjegyzés: Tehát $f'(x_0) = 0$ szükséges feltétele annak, hogy x_0 szélsőérték, de nem elégséges. Példa: $f(x) = x^3$.

Bizonyítás.

Ha f x_0-ban pozitívból negatívba vált akkor az addig monoton növőből csökkenőbe váltott, tehát x_0 lokális maximum. Ha f x_0-ban negatívból pozitívba vált, akkor az addig monoton csökkenőből növőbe váltott, tehát x_0 lokális minimum. ∎

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x-1)^4(x+2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x-1)^4(x+2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

$$f'(x) = 4(x-1)^3(x+2)^6 + (x-1)^4 6(x+2)^5 =$$

$$(x-1)^3(x+2)^5(4x+8+6x-6) = (x-1)^3(x+2)^5 10(x+\frac{1}{5})$$

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x-1)^4(x+2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

$$f'(x) = 4(x-1)^3(x+2)^6 + (x-1)^4 6(x+2)^5 =$$

$$(x-1)^3(x+2)^5(4x+8+6x-6) = (x-1)^3(x+2)^5 10(x+\frac{1}{5})$$

Látható, hogy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vagy $x = -2$ vagy $x = -\frac{1}{5}$. Emellett $f'(x) > 0$, ha $x \in \left(-2, -\frac{1}{5}\right)$ vagy $(1, +\infty)$, ezen intervallumokon $f(x)$ szigorú monoton nő.

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x-1)^4(x+2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

$$f'(x) = 4(x-1)^3(x+2)^6 + (x-1)^4 6(x+2)^5 =$$

$$(x-1)^3(x+2)^5(4x+8+6x-6) = (x-1)^3(x+2)^5 10(x+\frac{1}{5})$$

Látható, hogy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vagy $x = -2$ vagy $x = -\frac{1}{5}$. Emellett $f'(x) > 0$, ha $x \in \left(-2, -\frac{1}{5}\right)$ vagy $(1, +\infty)$, ezen intervallumokon $f(x)$ szigorú monoton nő.

$f'(x) < 0$, ha $(-\infty, -2)$ vagy $\left(-\frac{1}{5}, 1\right)$, ezen intervallumokon $f(x)$ szigorú monoton csökken.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$-ben és $x = 1$-ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$-ben és $x = 1$-ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\frac{1}{5}$-ben a derivált pozitívból negatívba vált, itt lokális maximum van.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$-ben és $x = 1$-ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\dfrac{1}{5}$-ben a derivált pozitívból negatívba vált, itt lokális maximum van.

Ennyi információ még kevés, hogy lerajzoljuk a függvényt. Még két dolgot nem tudunk:

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$-ben és $x = 1$-ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\dfrac{1}{5}$-ben a derivált pozitívból negatívba vált, itt lokális maximum van.

Ennyi információ még kevés, hogy lerajzoljuk a függvényt. Még két dolgot nem tudunk:

1. Merre "görbül" két pont között. Ennek vizsgálatához bevezetjük a konvexitás/konkavitás fogalmát.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$-ben és $x = 1$-ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\dfrac{1}{5}$-ben a derivált pozitívból negatívba vált, itt lokális maximum van.

Ennyi információ még kevés, hogy lerajzoljuk a függvényt. Még két dolgot nem tudunk:

1. Merre "görbül" két pont között. Ennek vizsgálatához bevezetjük a konvexitás/konkavitás fogalmát.
2. Hogyan viselkedik a függvény nagy x-re, van-e határértéke nagy x-re, vagy „nekisimul''-e egy egyenesnek a végtelenben?

Konvexitás

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény konvex egy I intervallumon, ha bármely két pontban megrajzolva a húrját a függvény görbéje a húr alatt halad. Ha mindig felette halad, akkor konkávnak nevezzük a függvényt. Formálisan, f konvex I-n, ha:

$$\forall c \in [0,1] : f(ca + (1-c)b) \leq cf(a) + (1-c)f(b) \quad \forall a,b \in I.$$

Formálisan, f konkáv I-n, ha:

$$\forall c \in [0,1] : f(ca + (1-c)b) \geq cf(a) + (1-c)f(b) \quad \forall a,b \in I$$

Konvexitás, inflexiós pont

Definíció

Azon pontot ahol a folytonos függvény konvexből konkávba vagy konkávból konvexbe vált, inflexiós pontnak nevezzük.

Konvexitás, inflexiós pont

Definíció

Azon pontot ahol a folytonos függvény konvexből konkávba vagy konkávból konvexbe vált, inflexiós pontnak nevezzük.

Tétel

Legyen f differenciálható egy I intervallumon. Ekkor

- f *konvex* I*-n* $\Leftrightarrow$ f' *monoton nő* I*-n.*
- f *konkáv* I*-n* $\Leftrightarrow$ f' *monoton fogy* I*-n.*

Második derivált függvény

Az f függvény deriváltjának deriváltját második deriváltnak nevezzük, és $f''(x)$-el jelöljük. Ha ez létezik I-n, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ kétszer differenciálható I-n. Az előzőekből kapjuk a következő tételt:

Második derivált függvény

Az f függvény deriváltjának deriváltját második deriváltnak nevezzük, és $f''(x)$-el jelöljük. Ha ez létezik I-n, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ kétszer differenciálható I-n. Az előzőekből kapjuk a következő tételt:

Tétel

Legyen f kétszer differenciálható I-n. Ekkor

- $f''(x) \geq 0$ *I-n* $\Leftrightarrow$ *f konvex I-n.*
- $f''(x) \leq 0$ *I-n* $\Leftrightarrow$ *f konkáv I-n.*
- $f''(x_0) = 0$ *és f'' előjelet vált x_0-ban* $\Leftrightarrow$ *f-nek az x_0 inflexiós pontja.*
- $f'(x_0) = 0$ *és* $f''(x_0) > 0$, *akkor x_0 lokális minimum.*
- $f'(x_0) = 0$ *és* $f''(x_0) < 0$, *akkor x_0 lokális maximum.*

Megjegyzés: Tehát $f''(x_0) = 0$ szükséges feltétele annak, hogy x_0 inflexiós pont legyen, de nem elégséges. Példa: $f(x) = x^4$.

Egyenes Aszimptoták $\pm\infty$-ben

Definíció

A $g(x) = Ax + B$ függvény az $f(x)$ lineáris aszimptotája a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben), ha

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = 0 \qquad (\lim_{x\to-\infty}(f(x)-g(x)) = 0)$$

Egyenes Aszimptoták $\pm\infty$-ben

Definíció

A $g(x) = Ax + B$ függvény az $f(x)$ lineáris aszimptotája a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben), ha

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0 \qquad (\lim_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = 0)$$

Példa: $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$-nek lineáris aszimptotája a $g(x) = 2x + 1$ avagy az $y = 2x + 1$ egyenes.

Egyenes Aszimptoták $\pm\infty$-ben

Definíció

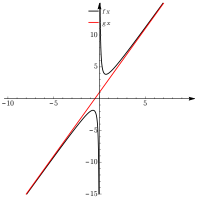
A $g(x) = Ax + B$ függvény az $f(x)$ lineáris aszimptotája a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben), ha

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0 \qquad \left(\lim_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = 0\right)$$

Példa: $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$-nek lineáris aszimptotája a $g(x) = 2x + 1$ avagy az $y = 2x + 1$ egyenes.

Ha létezik aszimptota, akkor

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = A, \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x) - Ax) = B.$$



Teljes függvényvizsgálat lépései

1. Határozzuk meg f értelmezési tartományát!
2. Ellenőrizzük a paritást és periodicitást!
3. Ha lehetséges keressük meg a gyököket!
4. Monotonitás: Számítsuk ki az első deriváltat, ennek vizsgálatával megtudjuk hol monoton a függvény, és hol lehetnek lokális szélsőértékei!
5. Konvexitás: Számítsuk ki a második deriváltat. Ebből megtudjuk a konvexitást, illetve a lehetséges inflexiós pontokat!
6. Határozzunk meg a határértékeket az értelmezési tartomány "határain"!
7. Egyenes aszimptoták meghatározása (ha van)!
8. Innen már meg tudjuk rajzolni a függvény grafikonját ahonnan megtudjuk az értékkészletet is!

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ függvényen!

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$. Páros (akkor y tengelyre szimmetrikus lesz), nem periodikus.
Határértéket csak $\pm\infty$-ben kell számolni:

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$. Páros (akkor y tengelyre szimmetrikus lesz), nem periodikus. Határértéket csak $\pm\infty$-ben kell számolni:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$. Páros (akkor y tengelyre szimmetrikus lesz), nem periodikus. Határértéket csak $\pm\infty$-ben kell számolni:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$. Páros (akkor y tengelyre szimmetrikus lesz), nem periodikus. Határértéket csak $\pm\infty$-ben kell számolni:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Zérushelye van $x = 1$-ben és $x = -1$-ben.

Példa - folytatás

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2} = \frac{2x}{x^4+1}$$

Példa - folytatás

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2} \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2 + (x^2-1)^2} = \frac{2x}{x^4+1}$$

Innen $f'(x) = 0$, pontosan akkor, ha $x = 0$ csak itt lehet szélsőérték.

Példa - folytatás

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2} = \frac{2x}{x^4+1}$$

Innen $f'(x) = 0$, pontosan akkor, ha $x = 0$ csak itt lehet szélsőérték.

$f'(x) < 0$, ha $x < 0$, itt a függvény szigorú monoton csökken, $f'(x) > 0$, ha $x > 0$, itt a függvény szigorú monoton nő.

Példa - folytatás

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2} = \frac{2x}{x^4+1}$$

Innen $f'(x) = 0$, pontosan akkor, ha $x = 0$ csak itt lehet szélsőérték.

$f'(x) < 0$, ha $x < 0$, itt a függvény szigorú monoton csökken, $f'(x) > 0$, ha $x > 0$, itt a függvény szigorú monoton nő.

Így $x = 0$ lokális minimum, mert a derivált előjele negatívból pozitívba vált. Látható, hogy $f(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4+1) - 2x4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-6x^4+2}{(x^4+1)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4+1) - 2x4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-6x^4+2}{(x^4+1)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$f''(x) \geq 0$ ha $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$, itt a függvény konvex.

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4+1) - 2x4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-6x^4+2}{(x^4+1)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$f''(x) \geq 0$ ha $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$, itt a függvény konvex.

$f''(x) \leq 0$ ha $x \in \left[-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right]$ itt a függvény konkáv.

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4+1) - 2x4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-6x^4+2}{(x^4+1)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$f''(x) \geq 0$ ha $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$, itt a függvény konvex.

$f''(x) \leq 0$ ha $x \in \left[-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right]$ itt a függvény konkáv.

Ezek szerint $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ inflexiós pontok.

Példa - folytatás

Az egyenes aszimptotája az $y = \frac{\pi}{4}$, mert

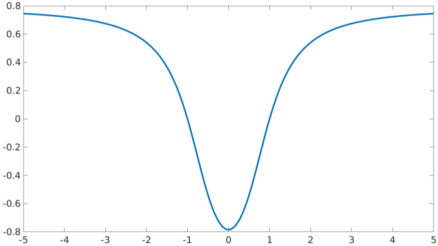
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x} = 0$ és $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 0\cdot x) = \frac{\pi}{4}$.

Példa - folytatás

Az egyenes aszimptotája az $y = \frac{\pi}{4}$, mert

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x} = 0$ és $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 0 \cdot x) = \frac{\pi}{4}$.

Próbáljuk meg ábrázolni:

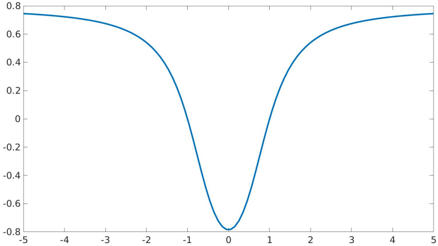


Példa - folytatás

Az egyenes aszimptotája az $y = \frac{\pi}{4}$, mert

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x} = 0$ és $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 0\cdot x) = \frac{\pi}{4}$.

Próbáljuk meg ábrázolni:



Innen az értékkészlet: $\left[f(0), \frac{\pi}{4}\right) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.